



TITLE:

構造を用いたノード分割によるセンサー位置同定問題に対する半正定値緩和アルゴリズム (最適化モデルとアルゴリズムの新展開)

AUTHOR(S):

木村, 康宏; 吉瀬, 章子

CITATION:

木村, 康宏 ...[et al]. 構造を用いたノード分割によるセンサー位置同定問題に対する半正定値緩和アルゴリズム (最適化モデルとアルゴリズムの新展開). 数理解析研究所講究録 2011, 1726: 97-111

ISSUE DATE:

2011-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170505>

RIGHT:

構造を用いたノード分割による センサー位置同定問題に対する半正定値緩和アルゴリズム

筑波大学大学院システム情報工学研究科 木村 康宏 (Yasuhiro Kimura)

Graduate School of Systems and Information Engineering,

University of Tsukuba

筑波大学大学院システム情報工学研究科 吉瀬 章子 (Akiko Yoshise)

Graduate School of Systems and Information Engineering,

University of Tsukuba

概要

本研究では、センサーネットワーク位置同定問題 (Sensor Network Localization, SNL) に対する半正定値緩和と、問題構造を利用した逐次解法の提案、及び計算機実験による検証を目的とする。

センサーネットワーク位置同定問題を最適化問題として定式化すると、実行可能解集合が非凸となり、最適解を求めることが困難となる。そこで [3, 11] では、問題を凸な半正定値計画問題に緩和する方法が提案されている。しかし、半正定値計画問題に緩和しただけでは、大規模な問題に対しては計算時間が増大し、実用的ではないと考えられる。[5, 16] では、頂点間の隣接関係をもとに、問題をいくつかの小さな問題に分割して半正定値緩和を行うことで、より短時間で解を求める手法が提案されている。しかし、これらの問題分割手法は、問題によって解の精度が悪くなることがあり、またパラメータ依存の大きなアルゴリズムとなっている。

そこで本研究では、センサーネットワーク位置同定問題に対して、グラフのクリーク構造に着目して問題を分割し、半正定値緩和を行う手法を提案する。また提案手法と既存手法の計算時間・計算精度の違いを計算機実験をもって検証する。

1 センサーネットワーク位置同定問題

センサーネットワーク位置同定問題を考えるに当たり、二つの通信機器アンカーとセンサーについて説明する。アンカーとは基地局や GPS 付きの端末を想定しており、センサーと通信を行う機能と、自身の位置特定機能を持つ。一方センサーは無線 IC タグ等を想定しており、他のセンサーやアンカーと通信する機能を持つ。一般的にアンカーは高価かつ電力消費量が大きいのにに対して、センサーは安価かつ電力消費量が小さいという特徴を持つ。通信のあるアンカー・センサー間、センサー・センサー間は、その受信電波強度を用いて互いの距離を推定する事ができる。

センサーネットワーク位置同定問題とは、少数のアンカーと多数のセンサーがばら撒かれ、ネットワークが構築されている状況で、アンカーの位置情報、アンカー・センサー間の距離情報、センサー・センサー間の距離情報の3つの情報を用いてセンサーの位置を推定する問題である。センサーネットワーク位置同定問題には、大規模倉庫における在庫管理、児童の登下校見守りシステム [14]、建築物の構造モニタリング [13] など多様な応用例が考えられている。GPS 付きの端末は高価であることに加え、屋内や地下といった場所では位置測位が困難であることから、センサーネットワーク位置同定問題は重要な問題である。

センサーネットワーク位置同定問題を最適化問題として定式化すると、実行可能解集合が非凸となり最適解を求めることが困難になる。本研究では構造を用いて問題を分割し、複数回の半正定値緩和問題を解くモデルを提案する。

2 定式化と半正定値緩和

この章ではセンサーネットワーク位置同定問題の定式化と半正定値緩和について紹介する。まず 2.1 節で、センサーネットワーク位置同定問題の定式化を行う。次に 2.2 節で、[3] よりセンサーネットワーク位置同定問題の半正定値緩和を紹介する。2.3 節で、[2] よりセンサーネットワーク位置同定問題に対する勾配法を用いた解の修正方法について紹介する。

2.1 センサーネットワーク位置同定問題の定式化

センサーネットワーク位置同定問題を定式化するためにあたっていくつかの記号を定義する。 $a_r \in \mathbb{R}^l$ を r 番目のアンカーの位置、 $d_{pq} \in \mathbb{R}$ を p, q 間の距離、 $\rho > 0$ をセンサー・アンカーの通信距離の上限とする。また $\mathcal{N}_x = \{(p, q) | 1 \leq p < q \leq m, \|a_p - a_q\| \leq \rho\}$ をセンサー・センサー間の距離が与えられている組の集合、 $\mathcal{N}_a = \{(p, r) | 1 \leq p \leq m, m+1 \leq r \leq n, \|a_p - a_r\| \leq \rho\}$ をセンサー・アンカー間の距離が与えられている組の集合とする。そして $x_p \in \mathbb{R}^l$ を p 番目のセンサーの位置とし、これを決定変数とする。これらを用いることで、センサーネットワーク位置同定問題 (SNL) は次のように定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \min & 0 \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = \|x_p - x_q\|^2 \quad (p, q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = \|x_p - a_r\|^2 \quad (p, r) \in \mathcal{N}_a \end{array} \quad (1)$$

一本目の制約式はセンサー・センサー間の距離制約を表し、二本目の制約式はセンサー・アンカー間の距離制約式を表している。この問題の目的はセンサーの位置を同定することであり、最小化・最大化する関数がないため、目的関数は 0 となっている。

センサーネットワーク位置同定問題では、端末間の通信によって距離を測定する。そのため距離 d_{pq}, d_{pr} に誤差が含まれることが考えられる。距離に誤差が入ることで、(1) は容易に実行不能となるため、この定式化は現実的な定式化ではない。そこで [3] から、誤差を含む問題に対しても有効な定式化を紹介する。

まず等式制約の誤差の絶対値を取って、目的関数とする.

$$\min \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}_x} |d_{pq}^2 - \|x_p - x_q\|^2| + \sum_{(p,r) \in \mathcal{N}_a} |d_{pr}^2 - \|x_p - a_r\|^2| \quad (2)$$

距離制約を必ず満たさなければならない(1)から、距離制約をできるだけ満たす解を見つける(2)へ、問題が緩和されていることが分かる.

更に非負変数 ξ を導入することで、目的関数から絶対値を除いた等価な問題(3)を導出する.

$$\left| \begin{array}{ll} \min & \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}_x} (\xi_{pq}^+ + \xi_{pq}^-) + \sum_{(p,r) \in \mathcal{N}_a} (\xi_{pr}^+ + \xi_{pr}^-) \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = \|x_p - x_q\|^2 \quad (p,q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = \|x_p - a_r\|^2 \quad (p,r) \in \mathcal{N}_a \\ & \xi_{pq}^+ \geq 0, \xi_{pq}^- \geq 0 \quad (p,q) \in \mathcal{N}_x \\ & \xi_{pr}^+ \geq 0, \xi_{pr}^- \geq 0 \quad (p,r) \in \mathcal{N}_a \end{array} \right. \quad (3)$$

(1)(3)はいずれも実行可能解集合が非凸となっており、このままでは最適解を求めることが困難である. そこで次節では、[3]からセンサーネットワーク位置同定問題に対する半正定値緩和について紹介する.

2.2 センサーネットワーク位置同定問題の半正定値緩和

[3]からセンサーネットワーク位置同定問題に対する半正定値緩和を紹介する. まず(1)を、 $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ という行列を用いて、次のように等価に変形する.

$$\left| \begin{array}{ll} \min & 0 \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = \sum_{i=1}^l X_{ip}^2 - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} X_{iq} + \sum_{i=1}^l X_{iq}^2 \quad (p,q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = \sum_{i=1}^l X_{ip}^2 - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} a_{ir} + \|a_r\|^2 \quad (p,r) \in \mathcal{N}_a \end{array} \right. \quad (4)$$

更に $Y = X^\top X$ という行列変数を導入し、次のように等価に変形する.

$$\left| \begin{array}{ll} \min & 0 \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = Y_{pp} - 2Y_{pq} + Y_{qq} \quad (p,q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = Y_{pp} - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} a_{ir} + \|a_r\|^2 \quad (p,r) \in \mathcal{N}_a \\ & Y - X^\top X = O \end{array} \right. \quad (5)$$

この問題は実行可能解集合が非凸となっており、このままでは最適解を求めることが困難である. そこで、既存研究[3]では $Y - X^\top X = O$ を $Y - X^\top X \succeq O$ と緩和する. 更に

$$Y - X^\top X \succeq O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_l & X \\ X^\top & Y \end{pmatrix} \succeq O$$

であることから、以下の半正定値緩和問題 (FSDP) が [3] より導出される。

$$\begin{array}{ll} \min & 0 \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = Y_{pp} - 2Y_{pq} + Y_{qq} \quad (p, q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = Y_{pp} - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} a_{ir} + \|a_r\|^2 \quad (p, r) \in \mathcal{N}_a \\ & \begin{pmatrix} I_l & X \\ X^\top & Y \end{pmatrix} \succeq O \end{array} \quad (6)$$

(FSDP) を解くことで、(SNL) の緩和解を求めることが可能となる。しかし 2.1 節でも述べたように、この定式化では距離 d_{pq}, d_{pr} に誤差が含まれている場合、容易に実行不能となる。誤差を含む問題に対しても有効な半正定値緩和問題は以下の形で与えられる。

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}_x} (\xi_{pq}^+ + \xi_{pq}^-) + \sum_{(p,r) \in \mathcal{N}_a} (\xi_{pr}^+ + \xi_{pr}^-) \\ \text{s.t.} & d_{pq}^2 = Y_{pp} - 2Y_{pq} + Y_{qq} + \xi_{pq}^+ - \xi_{pq}^- \quad (p, q) \in \mathcal{N}_x \\ & d_{pr}^2 = Y_{pp} - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} a_{ir} + \|a_r\|^2 + \xi_{pr}^+ - \xi_{pr}^- \quad (p, r) \in \mathcal{N}_a \\ & \xi_{pq}^+ \geq 0, \xi_{pq}^- \geq 0 \quad (p, q) \in \mathcal{N}_x \\ & \xi_{pr}^+ \geq 0, \xi_{pr}^- \geq 0 \quad (p, r) \in \mathcal{N}_a \\ & \begin{pmatrix} I_l & X \\ X^\top & Y \end{pmatrix} \succeq O \end{array} \quad (7)$$

行列変数のサイズを n 、精度を ϵ としたとき、半正定値計画問題の解法である主双対内点法では、問題に内点許容解がある場合、 $O(\sqrt{n} \log \frac{1}{\epsilon})$ の反復で ϵ 近似解を求めることが出来る。また各反復ごとに変数の数の連立方程式を解く。この際 $O(n^6)$ にかかる。このため半正定値計画問題では、行列変数のサイズが計算時間に大きく影響する。

センサーの数を m 、次元数を l としたとき、半正定値計画問題 (FSDP) の行列変数のサイズは $(l + m)$ となる。このため (FSDP) は大規模な問題になった際、半正定値行列のサイズが大きくなり解くことが困難になる。次章以降で、(FSDP) に対して行列変数を小さくすることで、大規模な問題を解く方法を紹介していく。

2.3 センサーネットワーク位置同定問題に対する勾配法

[2] から、センサーネットワーク位置同定問題に対する勾配法を用いた局所探索法について紹介する。センサーネットワーク位置同定問題に対する、制約なしの最適化問題は (2) であるが、より局所探索を適用しやすい (8) に問題を変更する。

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{l \times m}} \{f(X) := \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}_x} (d_{pq} - \|x_p - x_q\|)^2 + \sum_{(p,r) \in \mathcal{N}_a} (d_{pr} - \|x_p - a_r\|)^2\} \quad (8)$$

半正定値緩和問題によって求めた解を初期点とし, (8) の関数 $f(X)$ が減少するように解を更新する.

センサー位置同定問題に対する勾配法を説明するにあたり以下の集合を定義する.

$$\mathcal{N}_x^q := \{p | (p, q) \in \mathcal{N}_x\}, \mathcal{N}_a^q := \{r | (q, r) \in \mathcal{N}_a\}$$

また $x \neq b$ のとき $\nabla_x \|x - b\| = \frac{x - b}{\|x - b\|}$ となることから, $f(X)$ の勾配 $\nabla_q f$ は

$$\nabla_q f(X) = 2 \sum_{p \in \mathcal{N}_x^q} \left(1 - \frac{d_{pq}}{\|x_p - x_q\|}\right) (x_p - x_q)$$

となる. ステップサイズ $\alpha \in (0, 1]$ を適切に選んで, 以下の行列 $X(\alpha)$ を求め, $f(X(\alpha))$ を減少させる.

$$X(\alpha) = [x_1 - \alpha \nabla_1 f(X), \dots, x_m - \alpha \nabla_m f(X)] \quad (9)$$

3 コーダルグラフ

この章では, コーダルグラフの性質について [4] から紹介する. コーダルグラフとは, 任意の長さ 4 以上の閉路が弦をもつグラフのことであり, グラフにおける弦とは, 閉路中の連続しない 2 つの頂点を結ぶ枝のことである. コーダルグラフの持つ性質を用いて, 問題分割や半正定値緩和を行っていく. 頂点集合 $V = \{1, \dots, n\}$ と枝集合 $E \subseteq V \times V$ を持つ無向グラフ $G = (V, E)$ を考える. コーダルグラフについて, [4] から補題 3.1 を紹介する.

補題 3.1 ([4]Lemma1). コーダルグラフは隣接頂点がクリークを構成する頂点が存在する. この頂点を単体的頂点と呼ぶ.

コーダルグラフから単体的頂点を除いたグラフもまたコーダルグラフとなる. このことからコーダルグラフから単体的頂点を順に除いていくことで, 頂点に順序をつけることが出来る. この順序を完全消去順序と呼ぶ. 完全消去順序とコーダルグラフの関係について, [4] から定理 3.2 を紹介する

定理 3.2 ([4]Theorem 2.2). グラフ $G = (V, E)$ がコーダルグラフである必要十分条件は, G が完全消去順序を持つことである.

コーダルグラフは完全消去順序を用いることで, 極大クリークの列挙を簡単に行うことができるという特徴を持つ. コーダルグラフ $G = (V, E)$ の完全消去順序を (v_1, \dots, v_n) とする. このとき v_1 は単体的頂点なので, v_1 を含む極大クリークは $\{v_1\} \cup \text{adj}(v_1)$ に一意に定まる. また v_1 を含まない極大クリークは $\{v_2, \dots, v_n\}$ から誘導される部分グラフの極大クリークとなる. よって極大クリーク族 $\{C_r \subseteq V : r = 1, \dots, l\}$ は, $\{v_i\} \cup (\text{adj}(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) (i = 1, \dots, n)$ の中で極大な頂点集合の集合族として与えられる (ただし l は極大クリークの総数). よって極大クリークを以下のように表現することが出来る.

$$C_r = v_i \cup (\text{adj}(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}), i = \min\{j : v_j \in C_r\}$$

このことからコードルグラフ上の極大クリークの個数 l が、頂点数 n で押さえられていることが分かる。本研究では、極大クリークの列挙を簡単に行うことができるというコードルグラフの性質を、センサー位置同定問題の問題分割に用いている。

センサーネットワーク位置同定問題に対応するグラフは一般にコードルグラフではない。そのためコードルグラフではないグラフをコードルグラフにするために、枝を追加するコードル拡張を行う必要がある。しかし、枝数最小のコードル拡張を求める問題は NP 困難であることが知られている。そのためヒューリスティクスとして最小次数法 [7] を用いる。最小次数法は、次数の少ない順に頂点に順序をつけ、この順序を完全消去順序とするように枝を追加することで、コードル拡張を行う。

4 疎性を用いた半正定値緩和

この章では [11] より、センサーネットワーク位置同定問題に対する疎性を用いた半正定値緩和について紹介する。疎性を用いた半正定値計画問題は、一つ一つの行列変数のサイズを小さくすることで、計算時間を短縮することが出来る。更に正定値行列補完を用いることで、元の半正定値計画問題と等価な問題となることから、非常に性質の良い半正定値緩和問題である。まず 4.1 節では、正定値行列補完について [9] から補題を紹介する。次に 4.2 節では、[11] から正定値行列補完を用いたセンサーネットワーク位置同定問題の半正定値緩和問題を紹介する。また [11] で提案されている、枝 (距離情報) の間引きについてもあわせて紹介する。

4.1 正定値行列補完

正定値行列補完とは「枝 $E \subseteq V \times V$ に対応する対称行列 A が与えられたとき、 E にない成分に値を割り当てることで A を半正定値行列にできるか？」という問題である。コードルグラフに対応する行列の正定値行列補完について、[9] より以下の補題を紹介する。

補題 4.1 ([9]Corollary2). (a) と (b) は同値

(a) $G = (V, E)$ はコードルグラフ。

(b) $A \in \mathbb{S}^n$ の C_1, \dots, C_p に対応する主小行列がすべて半正定値行列になるとき、 A は正定値行列補完可能である。

次節では既存研究 [11] から、この補題 4.1 を基にした疎性を用いた緩和 (SFSDP) を紹介する。

4.2 既存研究 (SFSDP)

4.2.1 SFSDP の導出

[11] から、グラフの疎性に着目した半正定値緩和 (SFSDP) を紹介する。いま頂点集合をセンサー集合 $V = \{1, \dots, m\}$ 、枝集合をセンサー・センサー間の距離が与えられている組の集合 $E = \mathcal{N}_x$ として、センサー位置同定問題と関連付けられる無向グラフ $G = (V, E)$ を考え

る. また $\bar{G} = (V, \bar{E})$ を $G = (V, E)$ のコーダル拡張したグラフとし, C_1, \dots, C_k を $\bar{G} = (V, \bar{E})$ の極大クリークであるとする. このとき (SFSDP) は (10) のように書き表される.

$$\begin{array}{ll}
 \min & 0 \\
 \text{s.t.} & d_{pq}^2 = \sum_{i=1}^l Y_{pi} - 2 \sum_{i=1}^l Y_{pi} + \sum_{i=1}^l Y_{qi} \quad (p, q) \in \mathcal{N}_x \\
 & d_{pr}^2 = \sum_{i=1}^l Y_{pi} - 2 \sum_{i=1}^l X_{ip} a_{ir} + \|a_r\|^2 \quad (p, r) \in \mathcal{N}_a \\
 & \begin{pmatrix} I_l & (x_p : p \in C_h) \\ (x_p : p \in C_h)^\top & Y_{C_h, C_h} \end{pmatrix} \succeq O \quad (1 \leq h \leq k)
 \end{array} \tag{10}$$

ここで $(x_p : p \in C_h) \in \mathbb{R}^{l \times |C_h|}$ は極大クリーク C_h に含まれるセンサー p に対応するベクトル $x_p (p \in C_h)$ を並べた行列, $Y_{C_h, C_h} \in \mathbb{R}^{|C_h| \times |C_h|}$ は極大クリーク C_h に含まれるセンサー p, q に対応する Y の要素 $Y_{pq} (p, q \in C_h)$ を並べた行列を表す.

正定値行列のサイズが [3] の (FSDP)(6) は $m + l$ であるのに対して, [11] の (SFSDP)(10) は $|C_h| + l$ となっている. このため計算時間の短縮が期待できる. また 4.1 節の補題 4.1[9] から, (SFSDP)(10) と (FSDP)(6) は等価な問題となる. このことから, (SFSDP)(10) は大規模な問題に対して, (FSDP)(6) から精度を犠牲にすることなく行列変数のサイズを小さくすることが可能となる. また [11] では (SFSDP)(10) に対して, 主双対内点法が適用できるよう線形行列不等式への変換を行っている.

4.2.2 枝の間引き

[11] より, 問題から距離情報を間引くことで, 計算時間を短縮する方法を紹介する. センサーネットワーク位置同定問題のグラフ $G = (N, \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_a)$ を考える. ここで $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はアンカー・センサーの頂点集合, $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_a$ はセンサー・センサー間, アンカー・アンカー間の枝を表す. ここでグラフ G と同じ頂点集合 N と, $E' \subseteq \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_a$ となる枝集合 E' を持つ, G から枝を間引いた部分グラフ $G' = (N, E')$ を考える. また $\deg(p, E')$ を $G(N, E')$ における $p \in N$ の次数であるとする.

l 次元のセンサーネットワークでは, すべてのセンサー p について $\deg(p, E) \geq l + 1$ となることが, センサーの位置を決定するための必要条件である. そこで K を $l + 1$ 以上の整数として, $\forall p \in N, \deg(p, E') \geq \min\{\deg(p, \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_a), K\}$ となるような部分グラフ $G(N, E')$ の集合族を \mathcal{G}_K を考える. \mathcal{G}_K の中から極小な部分グラフ $\tilde{G} = (N, \tilde{E})$ を選び, $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_a$ をそれぞれ $\mathcal{N}_x \cap \tilde{E}, \mathcal{N}_a \cap \tilde{E}$ に置き換えることで制約式の本数を削減する.

5 半正定値緩和を用いた逐次解法

第 4 章で紹介した疎性を用いた緩和は, 行列変数のサイズを小さくすることで計算時間の短縮が期待できる. しかしこの緩和も, 大規模な問題となると計算時間が増大し解くことが困

難となる。この章では問題を分割し、複数回半正定値緩和問題を解くモデルを紹介する。まず [16] より (ISDP-A) を紹介する。次に問題構造に着目した、新たな手法 (ISDP-C) を提案する。

5.1 既存研究 (ISDP-A)

[16] の (ISDP-A) では、センサーとアンカーの隣接関係に着目して問題を分割し、半正定値計画問題を複数回解くことで計算時間の短縮を目指す手法である。

アルゴリズム 5.1 (ISDP-A).

1. パラメータ $t^0 \geq 0$ と $t = t^0$ を用意する。
2. t 個以上のアンカーとつながりのあるセンサーのみに注目し、半正定値緩和問題を解く。条件を満たすセンサーが存在しないとき $t := t - 1$ 。
3. 2で解を得たセンサーを擬似アンカーにする。すべてのセンサーの解が得られれば終了。そうでなければ $t = t^0$ として2へ。

擬似アンカーとは計算が終了し、位置が特定されたセンサーのことである。パラメータ t の値を変えることで、一回の反復で解く半正定値計画問題のサイズをコントロールするという特徴を持っている。

5.2 問題構造を利用した逐次解法の提案

問題構造を利用して問題分割を行うことで、計算時間を短縮しながら計算精度を向上させ、パラメーター依存を少なくすることを目指す。そこで今回新たに提案する手法 (ISDP-C) を紹介する。(ISDP-C) では (ISDP-A) と同じく半正定値計画問題を複数回解く。(ISDP-A) では擬似アンカーとつながりのあるセンサーに着目し、部分問題を構成している。それに対し (ISDP-C) では、あるサイズ以上のクリークを抜き出し、抜き出したクリークに含まれるセンサーと全てのアンカーを含む部分問題を構成する方法である。

アルゴリズム 5.2 (ISDP-C).

1. グラフをコーダル拡張し、極大クリークを含むクリーク族を抜き出す。またパラメータ $s^0, a^0 \geq 0$ と $s = s^0, a = a^0$ を用意する。
2. 頂点数が s 以上、アンカー・擬似アンカー数が a 以上のクリークを抜き出す。条件を満たすクリークが存在しないとき $s := s - 1$ 。 $s \leq a$ のとき $a := a - 1$ 。
3. 抜き出したクリークに含まれるセンサーと、すべてのアンカー・擬似アンカーを用いて、部分問題を構成し、半正定値緩和問題を解く。求まった半正定値緩和問題の解に対して、勾配法を用いて解を修正する。

4. 3で解を得たセンサーを擬似アンカーにする．すべてのセンサーの解が得られれば終了．そうでなければ $s = s^0, a = a^0$ として2へ．

(ISDP-C)では構造を見て、問題分割を行うことで、より情報量の多いセンサー群を優先的に解くことが出来ると考えられる．このため既存研究である[16]の(ISDP-A)と比較し、パラメータ依存の少ないアルゴリズムとなり、またセンサーの位置推定に対する精度の向上が期待できる．またイタレーションごとに扱う問題のサイズが小さくなるため、既存研究である[11]の(SFSDP)のと比較し、計算時間の短縮が期待できる．

6 計算機実験

6.1 計算実験の内容について

既存研究である(SFSDP)・(ISDP-A)と、本研究で提案する(ISDP-C)について、センサー数・アンカー数・配置・通信距離・誤差を変化させ計算機実験を行った．問題を分割して、複数回半正定値計画問題を解く手法である(ISDP-A)、(ISDP-C)については、問題分割の際指定するパラメータを調整せずに、最大の値を指定して実験を行った．

実験用の問題は、二次元平面上 $[0, 1] \times [0, 1]$ にセンサーをランダムにばらまいて生成する．また、距離の誤差については以下の式で生成する．ここで \hat{d}_{pq} は誤差を含んだ距離、 d_{pq} は誤差の処理を行う前の正しい距離を表す． ρ を誤差のパラメータとして予め与えておく．また ϵ_{pq} を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従って選ぶ．

$$\hat{d}_{pq} = (1 + \rho\epsilon_{pq})d_{pq}$$

実験の際には計算時間と計算精度を計測し、比較検証を行う．計算時間については、半正定値計画問題を解いている時間と勾配法を行っている時間の合計時間を『最適化』の時間、前準備も含めた問題を解くためにかった全体の計算時間を『全体』の時間として計測する．

計算精度については、実位置との乖離の平均として、以下のRMSDを用いる．ここで x_p は計算によって求めたセンサーの位置、 a_p はセンサーの真の位置を表す．

$$RMSD = \left(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \|x_p - a_p\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6.2 計算実験の結果

6.2.1 アンカーの位置

センサーネットワーク位置同定問題の難しさを決める要因の一つにアンカーの配置の違いが考えられる．そこで、アンカーの配置による計算結果への影響を調べる．センサーの個数を1000点、通信距離を0.4、誤差のパラメータを0.1とする．アンカーの配置は以下の4通りで実験する．

- 格子点に 36 点… 6×6 の格子点上にアンカーを配置
- 隅に三角形で 12 点… $[0, 1] \times [0, 1]$ の四隅に三角形型にアンカーを配置
- ランダムに 50 点
- ランダムに 100 点

計算精度を表 1 に、計算時間を表 2 に示す。計算精度について見ると、提案手法である (ISDP-C) は、これまでの逐次解法の既存手法である [16] の (ISDP-A) と比べ、概ね計算精度を改善している。また計算時間をみると (ISDP-C) は、[11] の (SFSDP) と比べ計算時間を短縮していることが分かる。このように (ISDP-C) を用いることで、計算時間を短縮しながら計算精度の良い解を求めることが可能となる。

表 1: アンカーの配置による違い-RMSD

	SFSDP	ISDPA	ISDPC
格子点に 36 点	3.0E-03	6.0E-03	4.9E-03
隅に三角形で 12 点	3.3E-03	1.1E-02	4.2E-03
ランダムに 50 点	3.0E-03	3.8E-02	3.2E-03
ランダムに 100 点	2.8E-03	3.5E-03	5.2E-03

表 2: アンカーの配置による違い-計算時間

	SFSDP		ISDPA		ISDPC	
	最適化	全体	最適化	全体	最適化	全体
格子点に 36 点	58.99	137.73	36.82	44.77	42.25	48.71
隅に三角形	59.32	138.09	73.03	81.33	41.71	48.32
ランダムに 50 点	46.43	126.57	40.21	48.08	38.82	45.35
ランダムに 100 点	45.63	127.00	29.41	38.53	48.37	55.28

6.2.2 アンカーの個数

センサーネットワーク位置同定問題は一般的にアンカーの点数が増加するに従って問題が簡単になっていく。そこでアンカーの点数による計算結果への影響を調べる。センサーを 5000 点、通信距離を 0.1、誤差のパラメータを 0.05 とする。アンカーを格子点上に配置し、アンカーの点数を 4 点から 121 点で変化させ、実験を行った。計算精度を表 3 に、計算時間を表 4 に示す。

計算時間についてみると、提案手法である (ISDP-C) は、[11] の (SFSDP) と比べ計算時間を短縮していることが分かる。[16] の (ISDP-A) はアンカー数が増加することで全体の計算時

間が増大することが分かる。また計算精度についてみると、提案手法である (ISDP-C) はアンカーの個数が増加するに従って計算精度が改善することが分かる。一方 (ISDP-A) はアンカー数が増加しても計算結果が改善するとは限らないことが分かる。提案手法である (ISDP-C) は問題分割のパラメータを調整する必要がなく、極大クリーク族からアンカー数・センサー数が大きいクリークを順に抜き出せばよいのに対し、(ISDP-A) は問題に応じた適切なパラメータを設定する必要があり、パラメータ依存の大きなアルゴリズムになっていると考えられる。

センサー数に対してアンカー数が少ない問題では (ISDP-C) は精度の良い解を求めることが難しいことがわかる。(ISDP-C) ではグラフをコーダル拡張するため、元々距離情報がなかった頂点集合をクリークであると誤って判定してしまう。そのため距離情報が不足した状態で問題分割が行われ、位置同定が上手くいかなくなると考えられる。

表 3: アンカーの個数による違い-RMSD

アンカーの点数	SFSDP	ISDPA	ISDPC
4	4.3E-03	4.2E-01	7.4E-01
9	1.9E-03	1.7E-01	6.1E-01
16	9.0E-04	7.1E-02	5.0E-01
25	6.9E-04	1.1E-03	3.6E-01
36	6.9E-04	7.3E-04	1.9E-01
49	6.5E-04	3.1E-02	5.1E-02
64	6.4E-04	1.3E-03	9.4E-04
81	6.2E-04	5.9E-03	8.0E-04
100	6.2E-04	3.4E-01	7.7E-04
121	6.1E-04	2.8E-01	7.5E-04

6.2.3 枝の間引き

4.2.2 節で示した距離情報の間引きについて、頂点ごとの次数の上限を変化させて実験を行う。センサーを 1000 点、アンカーを格子点上に配置で 36 点、通信距離を 0.4、誤差のパラメータを 0.1 とする。枝の間引きのパラメータを変化させて実験を行った。計算精度を表 5 に、計算時間を表 6 に示す。

計算時間についてみると、頂点ごとの次数の上限を増やすと計算時間が増大していくことが分かる。また計算精度について見ると、頂点の次数の上限を増やしても計算精度にそれほど大きな影響を及ぼさないことが分かる。

一方勾配法を行う前の計算精度を表 7 に示す。勾配法を行う前の計算精度は、頂点の次数の上限を増やすごとに解の精度が向上していることが分かる。勾配法を行う前と行う後の計算精度の結果から、半正定値計画問題で得られた解を勾配法で修正する際には、枝の間引く本数を増やして計算時間を短縮するほうが良いと考えられる。

表 4: アンカーの個数による違い-計算時間

	SFSDP		ISDPA		ISDPC	
アンカーの点数	最適化	全体	最適化	全体	最適化	全体
4	446.63	776.56	113.60	195.19	297.35	400.18
9	374.31	703.74	110.89	180.48	172.27	265.27
16	333.61	671.37	189.82	255.17	156.94	256.57
25	270.84	611.49	178.88	240.09	128.56	233.18
36	260.81	606.33	205.49	263.77	123.47	231.97
49	229.03	577.11	174.07	266.24	136.04	242.74
64	218.15	571.71	102.35	197.89	127.55	239.00
81	213.11	571.76	126.96	219.04	111.07	231.00
100	189.65	551.53	100.81	4434.61	104.93	228.51
121	250.85	617.58	111.45	6054.81	117.20	248.63

表 5: 枝の間引きによる違い-RMSD

頂点の次数	SFSDP	ISDPA	ISDPC
4	3.0E-03	5.1E-03	4.4E-03
6	3.0E-03	4.1E-03	4.4E-03
8	3.0E-03	4.2E-03	3.4E-03

6.2.4 距離の誤差

センサーネットワーク位置同定問題は距離の誤差が増大することで、問題が難しくなっていく。そこで距離情報の誤差を変化させて、手法ごとの誤差に対する耐性を調べる。センサー 1000 点、アンカーを格子点上に配置で 36 点、通信距離を 0.4 とする。誤差のパラメータを変化させて実験を行った。計算精度を表 8 に、計算時間を表 9 に示す。

計算精度について見ると、提案手法である (ISDP-C) は [16] の (ISDP-A) と比べ、距離の誤差が大きくなっても計算精度が悪化しにくいことが分かる。計算時間についてみると、誤差が大きくなることによって、計算時間が大きく変化することはないことが分かる。

6.2.5 問題のサイズ

センサー数 10000 点の大規模な問題について実験を行った。計算精度をセンサー 1000 点、アンカーを格子点上に配置で 100 点と 196 点、通信距離を 0.1、誤差のパラメータを 0.05 とする。表 10 に、計算時間を表 11 に示す。大規模な問題に対して、提案手法である (ISDP-C) は計算時間・計算精度の両面で、既存手法から結果を改善している。

表 6: 枝の間引きによる違い-計算時間

頂点の次数	SFSDP		ISDPA		ISDPC	
	最適化	全体	最適化	全体	最適化	全体
4	60.22	140.09	35.28	43.31	37.39	44.02
6	76.56	154.55	45.53	53.54	46.78	53.29
8	85.50	161.27	56.52	64.61	56.09	62.43

表 7: 勾配法を行う前の RMSD

頂点の次数	SFSDP	ISDPA	ISDPC
4	1.5E-01	5.0E-01	1.5E-01
6	7.0E-02	2.7E-01	1.6E-01
8	6.0E-02	2.9E-01	9.7E-02

7 結論

7.1 本研究の成果

本研究では、センサーネットワーク位置同定問題に対して、グラフのクリーク構造に着目して問題を分割し、半正定値緩和を行う手法 (ISDP-C) を提案した。今回提案した (ISDP-C) は、既存の分割手法である [16] の (ISDP-A) と比較して、多くの問題例で計算精度の良い解が得られた。また (ISDP-C) は問題分割のパラメータや距離の誤差からの影響を受けにくい解法となっていることを、計算実験で実証した。

7.2 今後の課題

6.2.2 節で示したように、センサー数に対するアンカー数の少ない問題では、(ISDP-C) では精度の良い解を求めることが難しい。このことからアンカー数の少ない問題でも、ある程度の精度が保障できるよう解法の改良を行う必要がある。

今回は、問題の構造を用いた逐次解法の一つとして、グラフをコーダル拡張した上で、クリークに着目して問題を分割する方法を取った。しかし、グラフの構造を活かすという点で、厳密にクリークを求めずに、クリークに近い頂点集合を抜き出し問題分割を行う方法や、グラフの剛性理論に基づいて問題分割を行う方法が考えられる。

参考文献

- [1] 安藤 繁, 田村 陽介, 戸辺 義人, 南 正輝, “センサネットワーク技術—ユビキタス情報環境の構築に向けて,” (2005) 東京電機大学出版局。

表 8: 距離の誤差による違い-RMSD

誤差のパラメータ	SFSDP	ISDPA	ISDPC
0.1	3.0E-03	6.0E-03	4.9E-03
0.2	6.1E-03	1.2E-02	8.4E-03
0.3	1.3E-02	1.9E-02	1.7E-02

表 9: 距離の誤差による違い-計算時間

誤差のパラメータ	SFSDP		ISDPA		ISDPC	
	最適化	全体	最適化	全体	最適化	全体
0.1	58.99	137.73	36.82	44.77	42.25	48.71
0.2	52.70	130.61	35.51	43.44	40.93	47.42
0.3	59.96	137.44	33.52	41.39	40.68	47.26

- [2] P. Biswas, T-C. Liang, K-C. Toh, T-C. Wang and Y. Ye, "Semidefinite programming approaches for sensor network localization with noisy distance measurements," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*:3(2006)360-371.
- [3] P. Biswas and Y. Ye, "Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization," *Proceedings of the Third International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*(2004)46-54.
- [4] J. Blair and B. Peyton, "An introduction to chordal graphs and clique trees," *Graph Theory and Sparse Matrix Computation*(1993)1-29, Springer-Verlag.
- [5] M. Carter, H. Jin, M. Saunders and Y. Ye, "SpaseLoc: An adaptive subproblem algorithm for scalable wireless sensor network localization," *SIAM Journal on Optimization*:17(2006)1102-1128.
- [6] M. Fukuda, M. Kojima, K. Murota and K. Nakata, "Exploiting sparsity in semidefinite programming via matrix completion I: General framework," *SIAM Journal on Optimization*:11(2000)627-674.
- [7] A. George and J. Liu, "The evolution of the minimum degree ordering algorithm," *SIAM Review*:31(1989)1-19.
- [8] R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa and H. Wolkowicz, "Positive definite completions of partial hermitian matrices," *Linear Algebra and Its Applications*:58(1984)109-124.
- [9] N. Kakimura, "A direct proof for the matrix decomposition of chordal-structured positive semidefinite matrices," *Linear Algebra and Its Applications*:433(2010)619-823.

表 10: センサー数 10000 点の問題-RMSD

アンカーの点数	SFSDP	ISDPA	ISDPC
100	1.8E-04	2.1E-03	2.3E-04
196	1.7E-04	3.7E-01	2.0E-04

表 11: センサー数 10000 点の問題-計算時間

アンカーの点数	SFSDP		ISDPA		ISDPC	
	最適化	全体	最適化	全体	最適化	全体
100	600.00	9422.79	278.96	990.49	333.29	875.56
196	704.80	9673.77	158.72	71040.73	310.71	888.27

- [10] S. Kim and M. Kojima, "Semidefinite programming relaxations for sensor network localization," *Proceedings of IEEE Multi-Conference on Systems and Control*(2010)19-23.
- [11] S. Kim, M. Kojima and H. Waki, "Exploiting sparsity in SDP relaxation for sensor network localization," *SIAM Journal on Optimization*:20(2009)192-215.
- [12] S. Kim, M. Kojima, H. Waki and M. Yamashita, "SFSDP: a Sparse version of Full SemiDefinite Programming relaxation for sensor network localization problems," Technical Report, Tokyo Institute of Technology(2009).
- [13] S. Kim, S. Pakzad, D. Culler, J. Demmel, G. Fenves, S. Glaser and M. Turon, "Health monitoring of civil infrastructures using wireless sensor networks," *Proceedings of the 6th International Conference on Information Processing in Sensor Networks*(2007)254-263.
- [14] 西尾信彦, "地域と連携する子供見守りシステムの構築と実証実験," オペレーションズリサーチ:55(2010)459-465.
- [15] S. Parter, "The use of linear graphs in gauss elimination," *SIAM Review*:3(1961)119-130.
- [16] 白畑 敬, 吉瀬 章子, "センサーネットワークローカライゼーション問題に対する SDP を用いた緩和法とその効果について," 筑波大学大学院システム情報工学研究科修士論文 (2009).